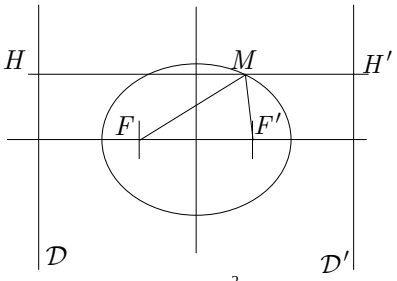
Théorème :

Soit Γ une ellipse de demi-grand axe a, de demi-petit axe b et de foyers F et F'.
Pour tout point M du plan on a : $M \in \Gamma \Leftrightarrow MF + MF' = 2a$.

Démonstration

Nous noterons c la demi-distance focale de l'ellipse Γ.

($\Rightarrow$) Introduisons $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les directrices de l'ellipse Γ appariées aux foyers F et F'. L'ellipse Γ est comprise dans la portion du plan délimitée par $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.



Soit $M \in \Gamma$. On a $MF = ed(M,\mathcal{D})$ et $MF' = ed(M,\mathcal{D}')$ en notant e l'excentricité de l'ellipse Γ.

$MF + MF' = e(d(M,\mathcal{D}) + d(M,\mathcal{D}'))$.

Or M est compris entre les deux droites parallèles $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ et celles-ci sont distantes de $2\dfrac{a^2}{c}$.

Donc $MF + MF' = e\dfrac{2a^2}{c} = 2a$.

($\Leftarrow$) Introduisons un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O;\vec{i},\vec{j})$ de sorte que $O = m[F,F']$ et $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{FF'}}{FF'}$.

On a $F(-c,0)$ et $F'(c,0)$.

Pour un point $M(x,y)$ du plan : notons $r = MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ et $r' = MF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$.

Supposons $MF + MF' = 2a$ i.e. $r + r' = 2a$.

On a alors $(r+r')^2 = 4a^2$ d'où $r^2 + r'^2 - 4a^2 = 2rr'$ puis $(r^2 + r'^2 - 4a^2)^2 = 4r^2r'^2$.

Ainsi $(2x^2 + 2y^2 + 2c^2 - 4a^2)^2 = 4(x^2 + y^2 + c^2 - 2cx)(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx)$

d'où $(2x^2 + 2y^2 + 2c^2 - 4a^2)^2 = 4((x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2)$.

En développant et en simplifiant : $-16a^2(x^2 + y^2 + c^2) + 16a^4 = -16c^2x^2$,

puis en réorganisant : $x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$ et enfin $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ puisque $a^2 = b^2 + c^2$.

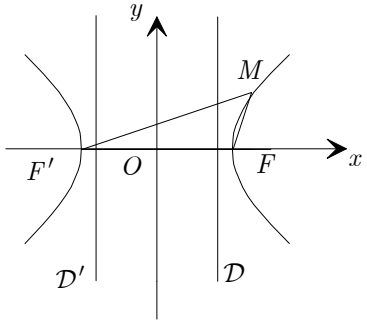
On retrouve l'équation de l'ellipse Γ. Ainsi $MF + MF' = 2a \Rightarrow M \in \Gamma$.

Théorème :

Soit Γ une hyperbole de demi-axe focal a et de foyers F et F'.
Pour tout point M du plan on a : $M \in \Gamma \Leftrightarrow \left|MF - MF'\right| = 2a$.

Démonstration

($\Rightarrow$) Même principe que ci-dessus, mais cette fois-ci les points de l'hyperbole ne sont justement pas compris entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.



ce qui implique $\left|d(M,\mathcal{D}) - d(M,\mathcal{D}')\right| = 2\dfrac{a^2}{c}$.

($\Leftarrow$) Même principe en observant que $\left|MF - MF'\right| = 2a$ donne $(r - r')^2 = 4a^2$ d'où $r^2 + r'^2 - 4a^2 = -2rr'$ puis $(r^2 + r'^2 - 4a^2)^2 = 4r^2r'^2$. On poursuit alors avec les mêmes calculs pour trouver à nouveau $x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$ qui se simplifie en $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ puisque cette fois-ci $a^2 + b^2 = c^2$.